Formiga, calculadora e série de Taylor

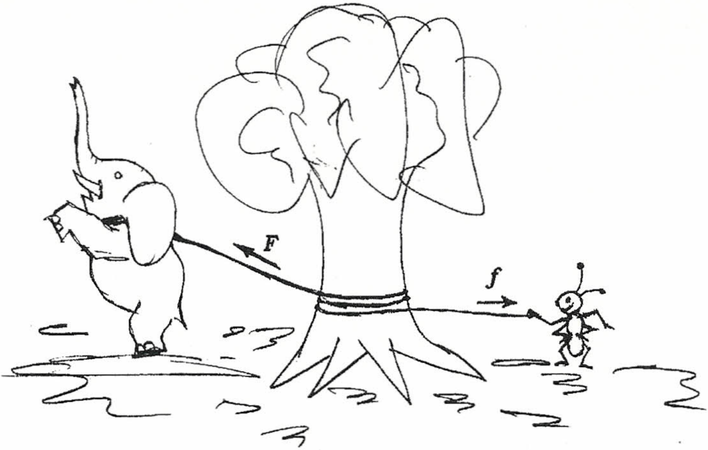
Neste capítulo resolve-se um problema-exemplo de Matemática Aplicada. Faz-se todo o percurso que é usual nestes casos: construção do respectivo modelo, a sua análise, conclusões. Dá-se uma breve introdução à Programação e analisa-se de uma forma crítica o funcionamento da calculadora: porque e como às vezes funciona convenientemente e porque e como às vezes não funciona. Conheceremos também séries de Taylor como um meio universal de cálculo dos valores de funções.

1.1 Como segurar um elefante?

Era uma vez uma formiga que vivia em África perto de um grande baobá. No seu último aniversário a avó ofereceu-lhe um elefante jovem e muito brincalhão, de quem a formiga logo gostou. Só que, durante as brincadeiras, o elefante fugia-lhe sempre. Não podendo segurar o seu amigo porque ele era muito mais forte do que ela, pediu ajuda à sua avó, que era uma formiga muito experiente e conhecedora da vida.

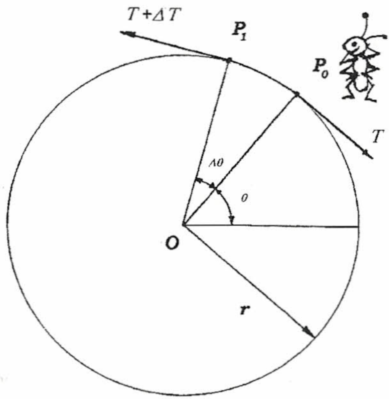
- Netinha, disse a avó, toma estes livros de Matemática e Mecânica, estuda-os bem e resolverás o problema.

A formiga assim fez e encontrou a solução.



Este desenho mostra a ideia principal de como a formiga resolveu o problema. Ela deu muitas voltas com a corda em torno do baobá, e a força de atrito entre a árvore e a corda compensou a diferença entre a força grande do elefante, F, e a força pequena da formiga, f. Mas quantas voltas foram necessárias? Vamos ver melhor as contas que a formiga fez.

A formiga analisou o equilíbrio de um pedaço pequeno de corda entre os pontos P_0 e P_1.



Descobriu que a corda desliza se a tensão, $T + \Delta T$, no ponto P_1 é maior do que a soma da tensão, T, no ponto P_0 e da força

Se a tensão no ponto número k é T_k, então a tensão no ponto $k+1$ é

$$T_{k+1} = T_k + \Delta T = T_k + \mu T_k \Delta\theta = T_k\left(1 + \mu\frac{2\pi}{n}\right). \qquad (1.1)$$

A tensão no ponto $k = 0$ era a força da formiga:

$$T_0 = f.$$

Suponhamos que a formiga fez N voltas de corda em torno do baobá. Então o último ponto tem número Nn. Utilizando Nn vezes a fórmula (1.1), a formiga encontrou o valor aproximado da tensão nesse ponto

$$T_{Nn} = T_{Nn-1}\left(1 + \mu\frac{2\pi}{n}\right) = \ldots = T_0\left(1 + \mu\frac{2\pi}{n}\right)^{Nn}$$

$$= f\left(1 + \mu\frac{2\pi N}{nN}\right)^{Nn}$$

(a formiga multiplicou e dividiu por N). Passando ao limite quando n tende para infinito e utilizando a fórmula

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

ela encontrou a tensão exacta no ponto dà corda onde estava o elefante

$$\lim_{n\to\infty} T_{Nn} = fe^{2\pi\mu N}.$$

Esta tensão tinha que ser maior do que a força do elefante

$$F < fe^{2\pi\mu N}.$$

Daqui ela encontrou o número necessário de voltas de corda para segurar o elefante:

$$\frac{1}{2\pi\mu}\ln\frac{F}{f} < N.$$

E a partir desta descoberta a formiga deixou de ter problemas com o seu elefante.

MATEMÁTICA : ORIGENS E APLICAÇÕES / GUEORGUI SMIRNOV E ISABEL MARIA DE OLIVEIRA RODRIGUES

AUTOR(ES):	Smirnov, Gueorgui; Rodrigues, Isabel Maria de Oliveira, co-autor
PUBLICAÇÃO:	Lisboa : Escolar, cop. 2006
DESCR. FÍSICA:	151 p. : il. ; 24 cm
ISBN:	972-592-189-5
DEP. LEGAL:	PT -- 239865/06